MAT1152 GENEL MATEMATİK-II FİNAL SINAVI SORULARININ CEVAP ANAHTARI

1.SORU

a) Verilen integralde $2^x = t$ dönüşümü yapalım.

$$2^x = t \Longrightarrow 2^x \ln 2 dx = dt$$

olur.Dolayısıyla;

$$\begin{aligned}\int \frac{2^x}{\sqrt{1+4^x}}dx &= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{1}{\ln 2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + c\end{aligned}$$

olur. son olarak $t = 2^x$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{1+4^x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\ln\left|2^x+\sqrt{1+2^{2x}}\right| + c$$

olarak elde edilir.

b) Verilen integrale kısmi integrasyon yapalım.

$$\begin{aligned} xdx &= dv \Longrightarrow \frac{x^2}{2} = v \\ u &= \arcsin x \Longrightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\int x \arcsin x dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

olur.Bu integralde

$$x = \sin t$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \sin^2 t dt \\ &= \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + c \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\sin 2(\arcsin x) + c\end{aligned}$$

olur.Dolayısıyla verilen integral

$$\int x \arcsin x dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin 2(\arcsin x) + c$$

şeklkinde elde edilir.

c) Verilen integralde verilmiş olan fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden küçük olduğundan ilk önce basit kesirlerine ayırma işlemi yapılır.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} &= \frac{x^2+1}{x\,(x+1)^2} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$x^2+1 = A\,(x+1)^2 + Bx\,(x+1) + Cx$$

işlemi yapılırsa

$$A = 1 \ , \ B = 0 \ , \ C = -2$$

olarak elde edilir.Ohalde

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} dx &= \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= \ln |x| + \frac{2}{x+1} + c \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.SORU

a) Verilen integralin karakterini belirlemek için limit testi uygulayalım.

$$\lim_{x \to 1} (1-x)^{p=1} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} = c$$

şeklinde olur.

$$p = 1 \text{ ve } c = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan verilen integral limit testinden ıraksak olur.

Ayrıca ikinci bir yol olarak integral hesaplanarakta sonucun sonlu olduğu dolayısıyla integralin yakınsak olduğu gösterilebilir.

b)Verilen integralin karakterini belirlemek için limit testi uygulayalım.

$$\lim_{x \to \infty} x^{p=\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+x}} = 1 = c$$

şeklinde olur.

$$p=\frac{4}{3}\ ,\ c=1$$

olduğundan verilen integral limit testinden yakınsaktır.

Ayrıca ikinci bir yol olarak Binom integrali hesaplanarakta sonucun sonlu olduğu dolayısıyla integralin yakınsak olduğu gösterilebilir.

3.SORU : $x=\sqrt{y}$ eğrisi , $x-y=-2$ ve $x+y=0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} \left|(x+2)-(-x)\right| dx + \int_{0}^{2} \left|\left[(x+2)-x^2\right]\right| dx \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.SORU: $xy=5$ eğrisi ile $x+y=6$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin $Oy-$ekseni etrafında döndürülmesiden elde edilen dönel cismin hacmi kabuk metodu ile

$$V = 2\pi \int_{1}^{5} x \left|(6-x)-\frac{5}{x}\right| dx$$

işaret tablosunda mutlak değer içindeki ifade incelenip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{1}^{5} \left(6x-x^2-5\right) dx \\ &= \frac{64}{3}\pi \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

5.SORU:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2}{2} \\ y(t)=\dfrac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

eğrisinin $0 \leq t \leq 1$ aralığındaki yay uzunluğu

$$\begin{aligned} l &= \int\limits_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \\ &= \int\limits_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}(2t+1)\,4} dt \\ &= \int\limits_0^1 \sqrt{(t+1)^2} dt = \int\limits_0^1 (t+1)\, dt \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

6.SORU:

a) Verilen serinin karakterini incelemek için oran testini kullanalım.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{10^n} \right| = 0 < 1$$

olduğundan verilen seri oran testinden mutlak yakınsaktır. Ayrıca mutlak yakınsak her seri yakınsak olacağından verilen seri yakınsaktır.Ayrıca Leibnitz testinden de yakınsaklık gösterilebilir.

b) Verilen serinin karakterini incelemek için oran testini kullanalım.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!}{3^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2} \frac{3^n (n!)^2}{(n+2)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{(n+3)}{(n+1)^2} = 0 < 1 \end{aligned}$$

olduğundan verilen seri oran testinden yakınsaktır.

c) Verilen serinin karakterini incelemek için limit testini kullanalım.

$$\lim_{n\to\infty} n^{p=\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} = 1 = c$$

olur. Dolayısıyla

$$p = \frac{3}{2} \text{ ve } c = 1$$

olduğundan verilen seri limit testinden yakınsaktır.

7.SORU: Verilen serinin yakınsaklık aralığını bulmak için Cauchy H'Adamart formülünü kullanırsak

$$c_n = \frac{1}{(n+1)\,5^n}$$

olmak üzere yakınsaklık yarıçapı

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{5} \Longrightarrow R = 5$$

olarak elde edilir.Ohalde

$$|x-2| < 5 \text{ yani } -3 < x < 7$$

için verilen seri yakınsaktır. Uç noktalarda inceleme yapacak olursak

$$x = -3 \text{ için } \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$$

serisi

$$a_n = \frac{1}{n+1} \text{ monoton azalan ve } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

olduğundan Leibnitz testinden yakınsaktır.

$$x = 7 \text{ için } \sum \frac{1}{n+1}$$

serisi ıraksaktır. Dolayısıyla verilen serinin yakınsaklık aralığı $[-3, 7)$ şeklinde elde edilir.

8.SORU: Soruda verilen A matrisinin tersini $A^{-1} = \dfrac{ekA}{|A|}$ formülü ile hesaplıyalım.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -3 + 4 = 1$ olur. Öteyandan Minörler

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$

şeklindedir.Dolayısıyla

$$A^{-1} = \frac{ekA}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{T}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

9.SORU: Verilen denkelm sisteminin çözümünü Cramer metodu ile bulalım.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -63 + 40 + 3 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$|A| = -20$$

olarak elde edilir. Buradan

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{19}{5}$$

olur.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{5}$$

olur.Ve benzer şekilde

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 & 10 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{5}$$

şeklinde elde edilir.